Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 24.11.2021, 17 Uhr

Aufgabe 13:

(i) Sei $m \neq n$. Zeige dass es *keine* Bijektion zwischen den Mengen $\{1, \dots, m\}$ und $\{1, \dots, n\}$ gibt.

(ii) Betrachte die endliche Menge $M = \{1, \dots, m\}$ und eine Funktion $f : M \to M$. Zeige, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv,

(b) f ist surjektiv,

(c) f ist bijektiv.

Freiwilliger Zusatz: Gilt ii) auch für unendliche Mengen?

Aufgabe 14: Zu gegebenen Mengen A, B betrachte die Menge

$$F(A, B) \ := \ \{f : A \to B\}$$

der Abbildungen von A nach B. Bestimme für jede der 16 möglichen Wahlen von A und B aus der Liste

$$\{0\}, \quad \{0, 1\}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{R},$$

ob $F(A, B)$ endlich, abzählbar unendlich, oder überabzählbar ist.

Aufgabe 15: Beweise oder widerlege für beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$

(i) $\sup(A \setminus B) = \sup A - \sup B$;

(ii) $\sup(A \setminus B) = \sup A - \inf B$;

(iii) $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$;

(iv) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;

(v) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, wobei $A + B := \{a + b\,;\, a \in A,\, b \in B\}$;

(vi) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, wobei $A \cdot B := \{a \cdot b\,;\, a \in A,\, b \in B\}$.

Aufgabe 16: Zeige, dass zwei Teilmengen $L, R \subset \mathbb{R}$ genau dann ein Dedekindscher Schnitt sind, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $L \cup R = \mathbb{R}$

(ii) $\sup L = \inf R$

(iii) $L \cap R = \emptyset,\ L \neq \emptyset,\ R \neq \emptyset$